2022 年度
名城大学オープンキャンパス
模擬講義

視えない世界で図形の面積や体積を測ってみよう
(大学数学への入口)

名城大学　理工学部数学科

目次

0　はじめに

この模擬講義では，中学校，高校で皆さんが学んできた面積，体積についての幾つかの公式を復習しながら，それらを視えない世界 (4 次元や 5 次元の空間) にまで拡張することについて，お話したいと思います．

具体的には，次の 4 つのテーマについてお話をします．

①　視えない世界の三角形の面積
②　視えない世界の四面体の体積
③　視えない世界の球の体積
④　視えない世界の球の表面積

これらのテーマについてお話をするとき，ほんのちょっとだけ大学の数学を使うとすっきりした公式を与えることができます．皆さんが大学に入学すると，まず最初に **「線形代数」「微分積分」** と呼ばれる 2 つの授業を受けることになりますが，それらの授業で学ぶことになる内容を少しだけ，本日のお話で使います．分からなくても全然気にする必要はありませんので，高校の数学を離れたこれまで触れたことのない数学について，雰囲気だけでも味わってもらえればと思います．

4 次元, 5 次元の空間というと，イメージするのが難しいのですが，2 次元の世界が「座標が 2 個の世界」，3 次元の世界が「座標が 3 個の世界」であるように，

4 次元空間　$\cdots$　**座標が 4 個の世界**
5 次元空間　$\cdots$　**座標が 5 個の世界**
$\vdots$
n **次元空間**　$\cdots$　**座標が** n **個の世界**

と考えてもらって構いません．

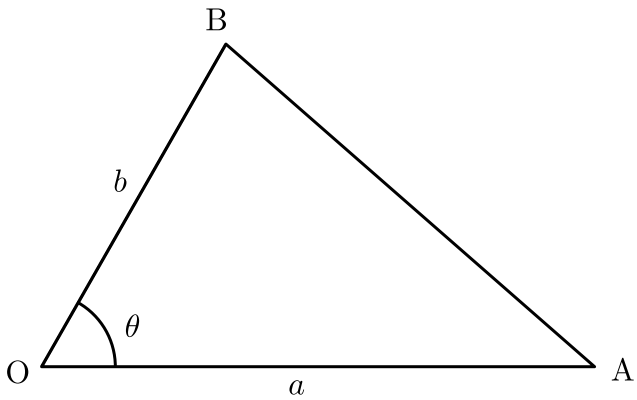
それでは，大学の数学にちょっとだけ足をつっこんでみましょう．

1　視えない世界の三角形の面積

　まずは視える世界で考えてみましょう．三角形の面積を求めるときの基本的な公式は

$$(\text{底辺} \times \text{高さ}) \div 2$$

です．高校の数学では，この公式をもとにして，いろいろな公式を学びます．少し復習してみましょう．次の三角形 OAB を考えます．



「三角比」を使うと，次のように三角形 OAB の面積 S が求められました．

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}ab\sin\theta} \tag{1.1}$$

　次に，**「ベクトル」**を使って，(1.1) の右辺を変形してみましょう．

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \qquad \overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

とおくと，(1.1) において

$$a = |\overrightarrow{a}|, \qquad b = |\overrightarrow{b}|$$

ですから，

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\theta$$

となります．この式の両辺を 2 乗してみると

$$\begin{aligned}
S^2 &= \frac{1}{4}|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2\sin^2\theta \\
&= \frac{1}{4}|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2\left(1-\cos^2\theta\right) = \frac{1}{4}\left\{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2 - |\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2\cos^2\theta\right\} \\
&= \frac{1}{4}\left\{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2 - (|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta)^2\right\}
\end{aligned}$$

となり，さらに，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ は

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$$

でしたから，

$$S^2 = \frac{1}{4}\left\{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2 - (\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2\right\}$$

ですね．したがって，次の公式が得られました．

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2 - (\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2}} \tag{1.2}$$

公式 (1.1) および (1.2) は，2 次元平面の中の三角形に対してだけでなく，3 次元空間の中の三角形に対しても成り立つことに注意しておきましょう．

★ 視えない世界へ

それでは次に，4 次元の空間の中に 3 つの点

$$\mathrm{O} = (0,0,0,0), \qquad \mathrm{A} = (a_1,a_2,a_3,a_4), \qquad \mathrm{B} = (b_1,b_2,b_3,b_4)$$

が与えられたとき，三角形 OAB の面積 S を求めることを考えてみましょう．まずは，公式 (1.1) を使って S を求めてみたいところですが，『角 θ』を視えない世界で考えるのは難しそうなので，公式 (1.2) を使うことを試みます．ただし，4 次元のベクトルの『大きさ』や『内積』が定義されていませんので，次のように定義します．以下の定義は，2 次元ベクトルや 3 次元ベクトルのときとあまり変わりませんが，高校では学ばない「大学の数学」です．

ベクトル $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2,a_3,a_4)$, $\overrightarrow{b}=(b_1,b_2,b_3,b_4)$ に対して，$\overrightarrow{a}$ の大きさ $\left|\overrightarrow{a}\right|$ を

$$\left|\overrightarrow{a}\right|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+a_4{}^2}$$

と定め，$\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の内積 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ を

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4$$

と定める．

すると，公式 (1.2) が成り立つのです．きちんと書いておきましょう．

$\mathrm{O}=(0,0,0,0)$, $\mathrm{A}=(a_1,a_2,a_3,a_4)$, $\mathrm{B}=(b_1,b_2,b_3,b_4)$ とする．$\overrightarrow{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とするとき，三角形 OAB の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{b}\right|^2-\left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)^2} \tag{1.2}$$

で与えられる．

上と同じようにして，5 次元ベクトルや 6 次元ベクトルに対しても『大きさ』や『内積』を定義することができ，公式 (1.2) を使って 5 次元空間の三角形，6 次元空間の三角形の面積を求めることができます．

★ 公式 (1.2) と『行列式』

公式 (1.2) を，大学で学ぶ『行列式』というものを使って表現することもできます．4 個の実数 a, b, c, d に対して，$\begin{vmatrix} \mathsf{a} & \mathsf{b} \\ \mathsf{c} & \mathsf{d} \end{vmatrix}$ という記号で表される実数を次のように定義します．

$$\begin{vmatrix} \mathsf{a} & \mathsf{b} \\ \mathsf{c} & \mathsf{d} \end{vmatrix}=\mathsf{ad}-\mathsf{bc}$$

例えば，$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=3\cdot 5-4\cdot 2=7$ となります．$\begin{vmatrix} \mathsf{a} & \mathsf{b} \\ \mathsf{c} & \mathsf{d} \end{vmatrix}$ のことを，2 次の『行列式』と

いいます．『**行列式**』は大学 1 年生のときに「**線形代数**」という授業で学ぶことになるでしょう．

行列式を使うと，(1.2) の右辺において

$$\begin{vmatrix} |\overrightarrow{a}|^2 & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} & |\overrightarrow{b}|^2 \end{vmatrix} = |\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2 - (\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2$$

が成り立っていますので，公式 (1.2) を

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} |\overrightarrow{a}|^2 & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} & |\overrightarrow{b}|^2 \end{vmatrix}}$$

と書くこともできます．さらに

$$|\overrightarrow{a}|^2 = \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}, \quad \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}, \quad |\overrightarrow{b}|^2 = \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b}$$

ですから，公式 (1.2) を

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b} \end{vmatrix}}} \tag{1.3}$$

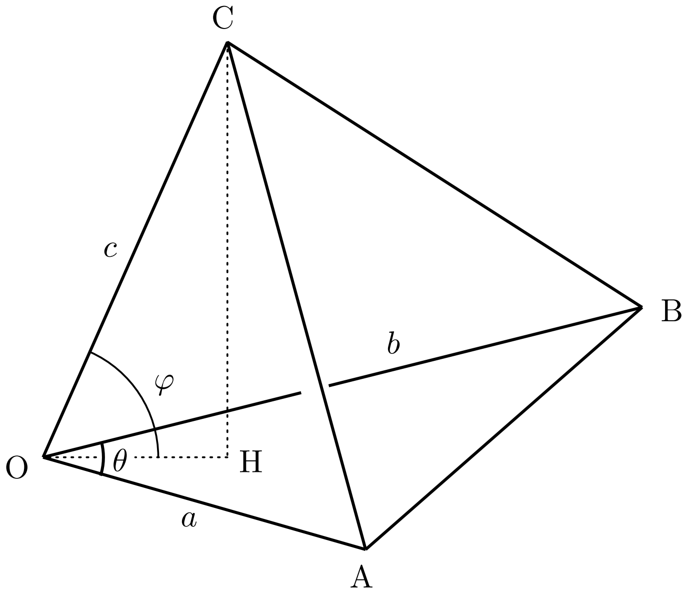
という規則性が見えやすい形で書き表すこともできます．

2　視えない世界の四面体の体積

まずは視える世界で考えます．3 次元空間の四面体の体積を求めるときの基本的な公式は

(底面積 × 高さ) ÷ 3

です．次の四面体 OABC の体積を考えてみましょう．



三角形 OAB を底面とすると，高さは

$$c\sin\varphi$$

であり，底面積 S は第 1 節の (1.1) 式より $S = \dfrac{1}{2}ab\sin\theta$ でしたから，次のように四面体 OABC の体積 V が求められます．

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3}Sc\sin\varphi = \frac{1}{6}abc\sin\theta\sin\varphi} \tag{2.1}$$

次に，「ベクトル」を使って，(2.1) の右辺を変形してみましょう．

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \quad \overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \quad \overrightarrow{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

とおきます．(2.1) より

$$V = \frac{1}{3}S|\overrightarrow{c}|\sin\varphi$$

です．この式の両辺を 2 乗すると

$$V^2 = \frac{1}{9}S^2|\overrightarrow{c}|^2\sin^2\varphi = \frac{1}{9}S^2\left(|\overrightarrow{c}|\sin\varphi\right)^2 = \frac{1}{9}S^2|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2$$

となり，ここで第 1 節の (1.2) 式を使うことにより

$$V^2 = \frac{1}{36}\left\{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2 - \left(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}\right)^2\right\}|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2$$

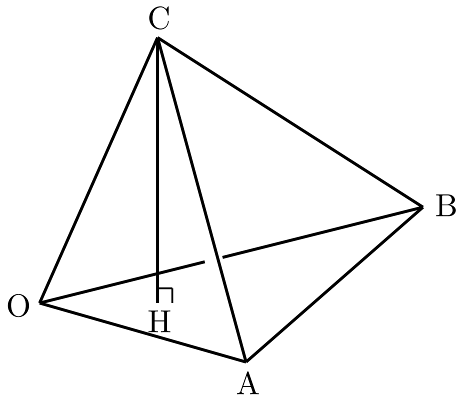
となります．さらに，

$$\begin{aligned}&\left\{|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2 - (\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2\right\}|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2\\ &= |\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2|\overrightarrow{c}|^2 + 2(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a})\\ &\quad - |\overrightarrow{a}|^2(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})^2 - |\overrightarrow{b}|^2(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a})^2 - |\overrightarrow{c}|^2(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2\end{aligned} \tag{2.2}$$

の成り立つことが分かります．(2.2) の証明については次のページで概略を説明します．いずれにしても，この式を使うことによって，次の公式が得られました．

$$\begin{aligned}V = \frac{1}{6}\Big\{&|\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2|\overrightarrow{c}|^2 + 2(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a})\\ &- |\overrightarrow{a}|^2(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})^2 - |\overrightarrow{b}|^2(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a})^2 - |\overrightarrow{c}|^2(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2\Big\}^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{2.3}$$

(2.2) 式の証明の概略を述べます．まずは，下の図のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ を，$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で書き表すことを考えます．



$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \vec{c}$ であり，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} = s\,\vec{a} + t\,\vec{b}$ (s, t は実数) と表すと，

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \vec{c} = s\,\vec{a} + t\,\vec{b} - \vec{c}$$

と書き表すことができます．そして，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ が満たす関係式

$$\overrightarrow{\mathbf{CH}} \cdot \vec{a} = 0, \qquad \overrightarrow{\mathbf{CH}} \cdot \vec{b} = 0$$

から s, t を求めると，

$$s = \frac{|\vec{b}|^2(\vec{a}\cdot\vec{c}) - (\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{b}\cdot\vec{c})}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2},$$
$$t = \frac{|\vec{a}|^2(\vec{b}\cdot\vec{c}) - (\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{a}\cdot\vec{c})}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

が得られます．さて，(2.2) 式の左辺において，

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2 &= \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CH}} = \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot(s\,\vec{a} + t\,\vec{b} - \vec{c}) \\
&= \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot(-\vec{c}) \qquad \left[\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{b} = 0 \text{ を用いた}\right] \\
&= (s\,\vec{a} + t\,\vec{b} - \vec{c})\cdot(-\vec{c}) \\
&= -s(\vec{a}\cdot\vec{c}) - t(\vec{b}\cdot\vec{c}) + |\vec{c}|^2
\end{aligned}$$

となっています．そこで，この式に先ほど求めた s と t を代入して，さらに出来上がったものを (2.2) 式の左辺に代入すると，(2.2) 式の右辺が導かれます．

[(2.2) 式の証明終わり]

★ 視えない世界へ

それでは次に，4 次元空間の中に 4 つの点

$$\mathrm{O} = (0, 0, 0, 0), \qquad \mathrm{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4), \qquad \mathrm{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4), \qquad \mathrm{C} = (c_1, c_2, c_3, c_4)$$

が与えられたとき，四面体 OABC の体積を求めることを考えてみましょう．すでに答は書いてあります．第 1 節で 4 次元ベクトルの大きさと内積を定義しましたね．それを使えば 4 次元空間の中の四面体の体積も，3 次元のときと同じ公式 (2.3) で求められるのです．きちんと書いておきましょう．

$\mathrm{O} = (0, 0, 0, 0)$, $\mathrm{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $\mathrm{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, $\mathrm{C} = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ とする．$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とするとき，四面体 OABC の面積 V は

$$\begin{aligned} V = \frac{1}{6}\Big\{ &|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2 + 2(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{c}\cdot\vec{a}) \\ &-|\vec{a}|^2(\vec{b}\cdot\vec{c})^2 - |\vec{b}|^2(\vec{c}\cdot\vec{a})^2 - |\vec{c}|^2(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\Big\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{2.3}$$

で与えられる．

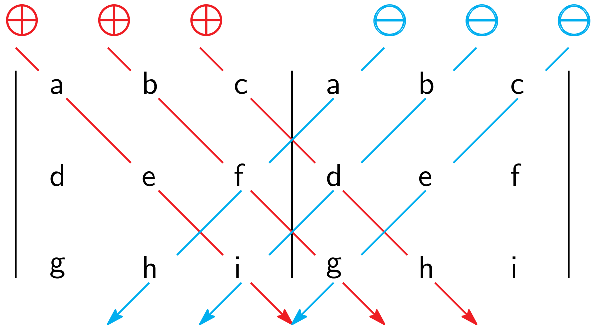
5 次元空間や 6 次元空間の四面体の体積も，同じ公式 (2.3) で求めることができます．

★ 公式 (2.3) と『行列式』

三角形の面積のときと同様，四面体の体積公式 (2.3) も，大学で学ぶ『行列式』を使って表現することができます．ただし，今度は 2 次の行列式ではなく 3 次の行列式を使います．9 個の実数 a, b, c, d, e, f, g, h, i に対して，$\begin{vmatrix} \mathsf{a} & \mathsf{b} & \mathsf{c} \\ \mathsf{d} & \mathsf{e} & \mathsf{f} \\ \mathsf{g} & \mathsf{h} & \mathsf{i} \end{vmatrix}$ という記号で表される実数を次のように定義し，これを 3 次の『行列式』といいます．

$$\begin{vmatrix} \mathsf{a} & \mathsf{b} & \mathsf{c} \\ \mathsf{d} & \mathsf{e} & \mathsf{f} \\ \mathsf{g} & \mathsf{h} & \mathsf{i} \end{vmatrix} = \mathsf{aei} + \mathsf{bfg} + \mathsf{cdh} - \mathsf{afh} - \mathsf{bdi} - \mathsf{ceg}$$

上の式は，次のような図で覚えておくとよいです．



3 次の行列式を使うと，(2.3) において

$$\begin{vmatrix} |\overrightarrow{a}|^2 & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a} \\ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} & |\overrightarrow{b}|^2 & \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} & |\overrightarrow{c}|^2 \end{vmatrix}$$

$$= |\overrightarrow{a}|^2|\overrightarrow{b}|^2|\overrightarrow{c}|^2 + 2(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a})$$

$$- |\overrightarrow{a}|^2(\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c})^2 - |\overrightarrow{b}|^2(\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a})^2 - |\overrightarrow{c}|^2(\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b})^2$$

が成り立っていますので，公式 (2.3) を

$$V = \frac{1}{6}\sqrt{\begin{vmatrix} |\overrightarrow{a}|^2 & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a} \\ \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} & |\overrightarrow{b}|^2 & \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} & |\overrightarrow{c}|^2 \end{vmatrix}}$$

と書くこともできます．規則性が見えやすい形に書き直すと

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{6}\sqrt{\begin{vmatrix} \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a} & \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{b} & \overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{c} \end{vmatrix}}} \tag{2.4}$$

となります．

3　視えない世界の球の体積

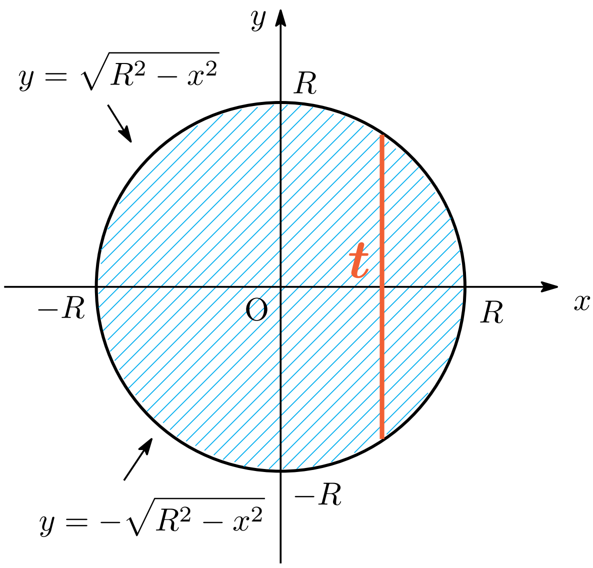
まずは視える世界で考えます．球の体積の前に，円の面積について考えてみましょう．半径 R の円の面積は

$$\pi R^2 \tag{3.1}$$

で与えられます．この事実を「数学 III」で学ぶ積分を使って確認してみましょう．原点を中心とする半径 R の円は

$$x^2 + y^2 \leqq R^2$$

という式で表されます．



上の図において，円を $x = t$ のところで切った切り口，すなわち図の赤線部分の長さは $2\sqrt{R^2 - t^2}$ なので，円の面積は，この長さの $t = -R$ から $t = R$ までの定積分

$$\int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - t^2}\,dt$$

で与えられます．そして，この定積分の値は

$$t = R\sin\theta$$

とおいた置換積分によって

$$\begin{aligned}
\int_{-R}^{R} 2\sqrt{R^2 - t^2}\,dt &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{R^2 - R^2\sin^2\theta} \cdot R\cos\theta\,d\theta \\
&= 2R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta = 2R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta \\
&= 2R^2 \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \pi R^2
\end{aligned}$$

と求められますので，これで半径 R の円の面積が πR^2 で与えられることが確認されました．

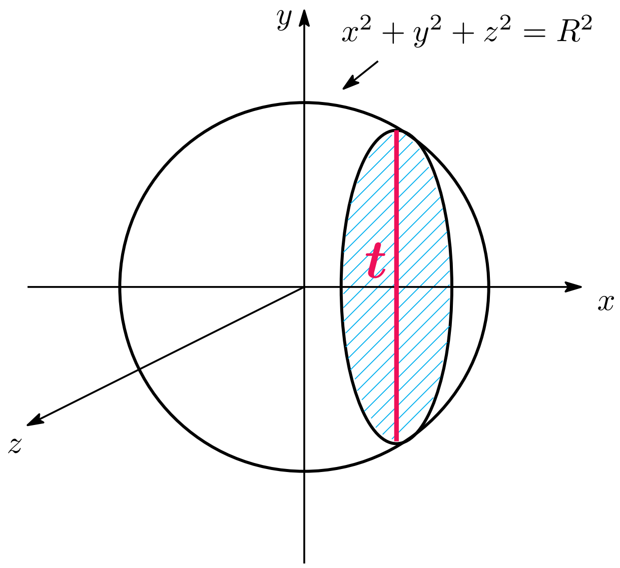
それでは次に球の体積を考えましょう．半径 R の球の体積は

$$\boxed{\frac{4}{3}\pi R^3} \tag{3.2}$$

で与えられます．円の面積のときと同じく，この事実も積分を使って確認してみましょう．原点を中心とする半径 R の球は

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqq R^2$$

という式で表されます．



前のページの図において，球を $x = t$ のところで切った切り口，すなわち図の青色部分の円は，「半径 $\sqrt{R^2 - t^2}$ の円」ですから，その面積は先ほど確認したように $\pi\left(\sqrt{R^2 - t^2}\,\right)^2$，すなわち

$$\pi(R^2 - t^2)$$

ですね．球の面積は，この面積の $t = -R$ から $t = R$ までの定積分

$$\int_{-R}^{R} \pi(R^2 - t^2)\,dt$$

で与えられます．この定積分の値は簡単に

$$\int_{-R}^{R} \pi(R^2 - t^2)\,dt = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - t^2)\,dt = \pi\left[R^2 t - \frac{t^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

と求められますので，これで半径 R の球の体積が $\dfrac{4}{3}\pi R^3$ で与えられることが確認されました．

★ 視えない世界へ

それでは次に，4 次元空間における半径 R の球

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leq R^2 \tag{✪}$$

の体積を，上と同じような考え方で求めてみましょう．もう図を描くことはできませんが，この球を $x = t$ のところで切った切り口は，

半径 $\sqrt{R^2 - t^2}$ の (3 次元の) 球

となります．その体積は先ほど確認したように

$$\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{R^2 - t^2}\,\right)^3$$

ですね． よって球 (✪) の体積は，

$$\int_{-R}^{R} \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{R^2 - t^2}\,\right)^3 dt$$

で与えられます．少し計算が長くなりますが，円の面積を求めたときと同じく，$t = R\sin\theta$

とおいた置換積分によって上の定積分の値を求めてみましょう．

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R}\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{R^2-t^2}\right)^3 dt &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{R^2-R^2\sin^2\theta}\right)^3\cdot R\cos\theta\,d\theta \\ &= \frac{4}{3}\pi R^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\,d\theta = \frac{4}{3}\pi R^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2\theta\right)^2 d\theta \\ &= \frac{4}{3}\pi R^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta \\ &= \frac{4}{3}\pi R^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{4}+\frac{\cos 2\theta}{2}+\frac{\cos^2 2\theta}{4}\right) d\theta \\ &= \frac{4}{3}\pi R^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{4}+\frac{\cos 2\theta}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right) d\theta \\ &= \frac{4}{3}\pi R^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{8}+\frac{\cos 2\theta}{2}+\frac{\cos 4\theta}{8}\right) d\theta \\ &= \frac{4}{3}\pi R^4\left[\frac{3}{8}\theta+\frac{\sin 2\theta}{4}+\frac{\sin 4\theta}{32}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\pi^2 R^4\end{aligned}$$

と計算できます．したがって，4 次元空間における半径 R の球 (✪) の体積は

$$\frac{1}{2}\pi^2 R^4 \tag{3.3}$$

で与えられることが分かりました．

せっかくなので，5 次元空間における半径 R の球

$$x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+x_4{}^2+x_5{}^2 \leq R^2 \tag{✯}$$

の体積も求めてみましょう．この球を $x_1=t$ のところで切った切り口は，

半径 $\sqrt{R^2-t^2}$ の (4 次元の) 球

となります．その体積はちょうど上で確認したように $\frac{1}{2}\pi^2\left(\sqrt{R^2-t^2}\right)^4$，すなわち

$$\frac{1}{2}\pi^2\left(R^2-t^2\right)^2$$

ですね．よって球 (✯) の体積は

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{2}\pi^2 (R^2 - t^2)^2 \, dt$$

で与えられます．この定積分の値は

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R} \frac{1}{2}\pi^2 (R^2 - t^2)^2 \, dt &= \frac{1}{2}\pi^2 \int_{-R}^{R} (R^4 - 2R^2t^2 + t^4) \, dt \\ &= \frac{1}{2}\pi^2 \left[R^4 t - \frac{2R^2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \right]_{-R}^{R} \\ &= \frac{8}{15}\pi^2 R^5\end{aligned}$$

と求められ，5 次元空間における半径 R の球 (✯) の体積は

$$\boxed{\frac{8}{15}\pi^2 R^5} \tag{3.4}$$

となることが分かります．

このような計算を繰り返して，6 次元空間，7 次元空間，... における半径 R の球の体積を求めることができるのです．

★ 球の体積公式と $\varGamma$ (ガンマ) 関数

さて，一般に n 次元空間における半径 R の球の体積について，それを一撃で与える公式を考えてみましょう．大学で学ぶ『$\varGamma$ **関数**』と呼ばれる関数を使うと，鮮やかな公式を書くことができます．まずは $\varGamma$ 関数の定義をしましょう．正の実数 x に対して，次の積分を考えます．

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt} \tag{✯}$$

高校数学では見たことのない新しい積分です．まず，積分記号の上に「$+\infty$」という見慣れないものがありますね．また，積分記号の下が 0 となっていますが，$0 < x < 1$ のときは t の関数 $t^{x-1}e^{-t}$ が $t = 0$ で定義されないので，取り扱いが難しそうですね．このよ

うな積分は大学 1 年の**「微分積分」**で学ぶもので，**『広義積分』**と呼ばれており，正確には「定積分」と「極限」をミックスさせた次のようなものです．

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{\substack{a\to+0\\ b\to+\infty}} \int_a^b f(t)\,dt$$

例えば (✬) で $x=1$ としたものは

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} t^{1-1}e^{-t}\,dt &= \int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt = \lim_{\substack{a\to+0\\ b\to+\infty}} \int_a^b e^{-t}\,dt \\ &= \lim_{\substack{a\to+0\\ b\to+\infty}} \Big[-e^{-t}\Big]_a^b = \lim_{\substack{a\to+0\\ b\to+\infty}} (-e^{-b}+e^{-a}) \\ &= 1\end{aligned}$$

のように計算することができます．

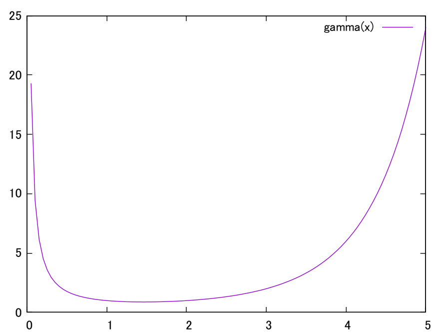
(✬) を $\Gamma(x)$ と書き表し，これを**『Γ 関数』**といいます．

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt \quad (x>0)$$

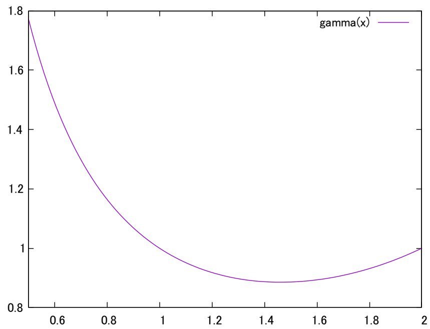
すぐ上の計算によれば

$$\Gamma(1) = 1 \tag{3.5}$$

ですね．



$y = \Gamma(x)$ のグラフは前ページの図のようになっていて，特に $\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 2$ の部分を拡大すると，下の図のようになっています．



Γ 関数は，次の性質をもっています．(証明については大学の授業で学ぶことになるでしょう.)

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \qquad (x > 0) \tag{3.6}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{3.7}$$

例えば，(3.6) 式で $x = 1$ としたものを考えることにより，

$$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1 \cdot \Gamma(1)$$

となり，(3.5) 式の $\Gamma(1) = 1$ を使うことで

$$\Gamma(2) = 1$$

が得られます．次に (3.6) 式で $x = 2$ としたものを考えることにより，

$$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1 = 2.$$

$x = 3$ としたものを考えることにより，

$$\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

$x = 4$ としたものを考えることにより，

$$\Gamma(5) = \Gamma(4+1) = 4 \cdot \Gamma(4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

一般に

$$\textbf{自然数 } \boldsymbol{n} \textbf{ に対して } \boldsymbol{\Gamma(n+1) = n! = n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1} \tag{3.8}$$

であることが分かります.

一方, (3.6) 式で $x=\dfrac{1}{2}$ としたものを考えることにより,

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

となり, (3.7) 式の $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ を使うことで

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

が得られます. 次に (3.6) 式で $x=\dfrac{3}{2}$ としたものを考えることにより,

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{3}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}.$$

$x=\dfrac{7}{2}$ としたものを考えることにより,

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)=\frac{5}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{15}{8}\sqrt{\pi}.$$

$x=\dfrac{9}{2}$ としたものを考えることにより,

$$\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{7}{2}+1\right)=\frac{7}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\frac{105}{16}\sqrt{\pi}.$$

一般に

$$\textbf{自然数 } \boldsymbol{n} \textbf{ に対して } \boldsymbol{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)=\frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1}{2^n}\sqrt{\pi}} \tag{3.9}$$

であることが分かります.

さてそれでは，n 次元空間における半径 R の球

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_{n-1}{}^2 + x_n{}^2 \leq R^2 \tag{✧}$$

の体積公式を，Γ 関数の力を借りて書いてみましょう．球 (✧) の体積を $V_n(R)$ と書くことにすると，次の公式が成り立ちます．

$$\boldsymbol{V_n(R) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\sqrt{\pi^n}R^n} \tag{3.10}$$

この公式は，先ほど 4 次元空間, 5 次元空間における考察で用いた切り口によるアプローチと，自然数 n についての数学的帰納法を使って証明されます．後の第 6 節で証明を与えてありますので，興味のある方はぜひ読んでみてください！

$n = 1, 2, 3, 4, 5$ の場合に公式 (3.10) が正しいことを確認しておきましょう．$n = 1$ の場合，公式 (3.10) によれば

$$V_1(R) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}\sqrt{\pi}R = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\sqrt{\pi}R = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}R = 2R$$

となります．$V_1(R)$ は 1 次元空間における半径 R の球の体積，すなわち

$$\text{線}\ \ x^2 \leq R^2$$

の長さですから確かに $2R$ ですね．

$n = 2$ の場合，公式 (3.10) によれば

$$V_2(R) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2}{2}+1\right)}\sqrt{\pi^2}R^2 = \frac{1}{\Gamma(2)}\pi R^2 = \frac{1}{1}\pi R^2 = \pi R^2$$

となります．$V_2(R)$ は 2 次元空間における半径 R の球の体積，すなわち

$$\text{円}\ \ x^2 + y^2 \leq R^2$$

の面積ですから確かに πR^2 です．

$n=3$ の場合, 公式 (3.10) によれば

$$V_3(R)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)}\sqrt{\pi^3}R^3=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\sqrt{\pi^3}R^3=\frac{1}{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi^3}R^3=\frac{4}{3}\pi R^3$$

となって, 皆さんの知っている公式 (3.2) と一致します. $n=4$ の場合は, 公式 (3.10) によれば

$$V_4(R)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{4}{2}+1\right)}\sqrt{\pi^4}R^4=\frac{1}{\Gamma(3)}\pi^2R^4=\frac{1}{2}\pi^2R^4$$

となって, 先ほど求めた公式 (3.3) と同じですね. $n=5$ の場合も, 公式 (3.10) によれば

$$V_5(R)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{2}+1\right)}\sqrt{\pi^5}R^5=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}\sqrt{\pi^5}R^5=\frac{1}{\frac{15}{8}\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi^5}R^5=\frac{8}{15}\pi^2R^5$$

となり, 先ほど求めた公式 (3.4) と同じものが得られることが分かります.

公式 (3.10) を, Γ 関数が表に出ない形で表現しておきましょう. n が偶数の場合と奇数の場合に分けて考えます.

n が偶数 $n=2m$ $(m=1, 2, 3, \ldots)$ の場合：公式 (3.10) によれば

$$V_{2m}(R)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{2m}{2}+1\right)}\sqrt{\pi^{2m}}R^{2m}=\frac{1}{\Gamma(m+1)}\pi^mR^{2m}$$

となり, (3.8) 式により $\Gamma(m+1)=m!$ でしたから,

$$V_{2m}(R)=\frac{1}{m!}\pi^mR^{2m}$$

が得られます.

n が奇数 $n=2m-1$ $(m=1, 2, 3, \ldots)$ の場合：公式 (3.10) によれば

$$V_{2m-1}(R)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{2m-1}{2}+1\right)}\sqrt{\pi^{2m-1}}R^{2m-1}=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right)}\sqrt{\pi^{2m-1}}R^{2m-1}$$

となり, (3.9) 式により

$$\Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right)=\frac{(2m-1)(2m-3)\cdot\cdots\cdot3\cdot1}{2^m}\sqrt{\pi}$$

でしたから，

$$V_{2m-1}(R) = \frac{1}{\dfrac{(2m-1)(2m-3)\cdot \cdots \cdot 3\cdot 1}{2^m}\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi^{2m-1}}R^{2m-1}$$
$$= \frac{2^m}{(2m-1)(2m-3)\cdot \cdots \cdot 3\cdot 1}\pi^{m-1}R^{2m-1}$$

が得られます．

上の結果をまとめておきましょう．

n が偶数 $n = 2m$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ のとき

$$V_n(R) = V_{2m}(R) = \frac{1}{m!}\pi^m R^{2m}$$

n が奇数 $n = 2m-1$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ のとき

$$V_n(R) = V_{2m-1}(R) = \frac{2^m}{(2m-1)(2m-3)\cdot \cdots \cdot 3\cdot 1}\pi^{m-1}R^{2m-1} \tag{3.11}$$

話が長くなってしまったので，視えない世界の球の体積についてのお話はここまでといたします．

4　視えない世界の球の表面積

　まずは見える世界で考えます．球の表面積の前に，円周の長さについて考えてみましょう．半径 R の円周の長さ $A(R)$ は

$$A(R) = 2\pi R \tag{4.1}$$

で与えられます．(4.1) 式は円周率 π の“**定義そのもの**”といってもよいのですが，ここではあえて，“微分”を使って (4.1) 式を確認してみましょう．基本となる考え方は

“穴の空いたコインを外から削っていくと円周になる”

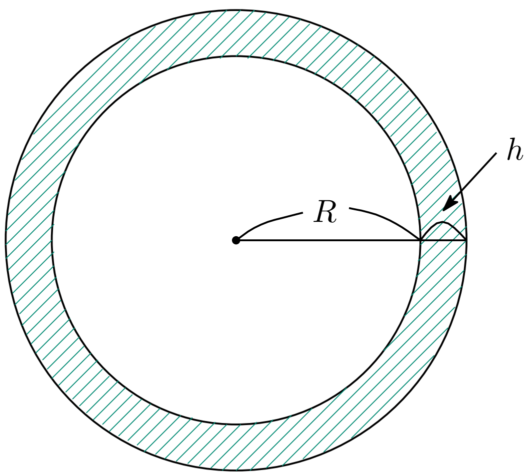
または

“穴の空いたコインの穴を拡げていくと円周になる”

です．(4.1) 式を確認する前に，円の面積について復習しておきましょう．半径 R の円の面積は πR^2 でした．πR^2 のことを，$S(R)$ と書くことにします．($S(R)$ は第 3 節で $V_2(R)$ と書いたものと同じです.)

$$S(R) = \pi R^2$$

$S(R)$ は半径 R を変えれば値が変わるので，変数 R の関数と見ることもできます．いま，h を 0 に限りなく近い正の実数として，次の図の斜線部分のような，半径 $R+h$ の円から半径 R の円を除いた部分の面積を考えてみることにします．



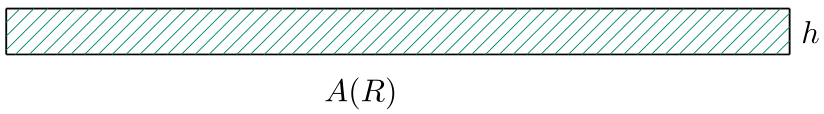
図の斜線部分の面積は，半径 $R+h$ の円から半径 R の円を除いた部分の面積ですから

$$S(R+h)-S(R)$$

となっています．一方，この斜線部分に切れ込みを入れて，拡げてみると，h が 0 に近ければ近いほど，次のような「底辺の長さが $A(R)$ で高さが h の長方形」に近い形となります．そして，その長方形の面積は

$$A(R)h$$

ですね．



従って，h が 0 に近ければ近いほど，$S(R+h)-S(R)$ と $A(R)h$ は値がほぼ等しくなり，

$$A(R) \fallingdotseq \frac{S(R+h)-S(R)}{h}$$

です．その結果，

$$A(R) = \lim_{h\to 0}\frac{S(R+h)-S(R)}{h}$$

が得られます．

微分の定義によれば，上の式の右辺は $\dfrac{d}{dR}S(R)$ そのものです．$S(R)=\pi R^2$ でしたから，以上により

$$\boxed{A(R) = \frac{d}{dR}S(R) = \frac{d}{dR}(\pi R^2) = 2\pi R \qquad (4.2)}$$

となって，(4.1) 式の確認ができました．

次に球の表面積を考えましょう．半径 R の球の表面積は

$$\boxed{4\pi R^2 \qquad (4.3)}$$

で与えられます．この (4.3) 式も，円周の長さのときと同じような考え方で，半径 R の球の体積を微分することによって

$$\frac{d}{dR}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = 4\pi R^2 \tag{4.4}$$

と計算することで確かめられます．

★ 視えない世界へ

さてそれでは，n 次元空間における半径 R の球

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_{n-1}{}^2 + x_n{}^2 \leq R^2 \tag{✧}$$

の表面積を求めてみましょう．1 次元の場合だけは少し厄介なので今回は考えないことにして，2 次元以上で考えます．すなわち $n \geqq 2$ **として考えることにします**．考え方は，先ほどと全く同じです．**球 (✧) の体積 $V_n(R)$ を微分すればよい**のです．

球 (✧) の体積 $V_n(R)$ は，第 3 節の (3.10) 式によれば

$$V_n(R) = \frac{1}{\mathit{\Gamma}\left(\frac{n}{2}+1\right)}\sqrt{\pi^n}R^n$$

でした．よって

$$\frac{d}{dR}V_n(R) = \frac{n}{\mathit{\Gamma}\left(\frac{n}{2}+1\right)}\sqrt{\pi^n}R^{n-1} \tag{4.5}$$

と計算できます．

右辺における分子の n が隠れるような形に (4.5) を書き換えましょう．$\mathit{\Gamma}$ 関数の性質 (3.6) によれば

$$\mathit{\Gamma}(x+1) = x \cdot \mathit{\Gamma}(x) \quad (x > 0)$$

でしたから，この式で $x = \dfrac{n}{2}$ としたものを考えることにより，

$$\mathit{\Gamma}\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{n}{2}\mathit{\Gamma}\left(\frac{n}{2}\right)$$

となりますので，この式を (4.5) 式に代入することによって

$$\frac{d}{dR}V_n(R) = \frac{2}{\mathit{\Gamma}\left(\frac{n}{2}\right)}\sqrt{\pi^n}R^{n-1}$$

となりました．

結果をまとめておきましょう．$n \geqq 2$ とし，n 次元空間における半径 R の球 ($\diamondsuit$) の表面積を $A_{n-1}(R)$ と書くことにすると，次の公式が成り立ちます．

$$\boldsymbol{A_{n-1}(R) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\sqrt{\pi^n}R^{n-1}} \tag{4.6}$$

左辺を $A_n(R)$ と書かずに $A_{n-1}(R)$ と書いたのには理由があるのですが，いまはそんなに気にしなくてもＯＫです．

公式 (4.6) を，Γ 関数が表に出ない形で表現しておきましょう．n が偶数の場合と奇数の場合に分けて考えます．

n が偶数 $n = 2m$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ の場合：第 3 節の (3.11) 式によれば，

$$V_{2m}(R) = \frac{1}{m!}\pi^m R^{2m}$$

でした．よって

$$A_{2m-1}(R) = \frac{d}{dR}V_{2m}(R) = \frac{2m}{m!}\pi^m R^{2m-1} = \frac{2}{(m-1)!}\pi^m R^{2m-1}$$

と計算できます．

n が奇数 $n = 2m-1$ $(m = 2, 3, \ldots)$ の場合：(3.11) 式によれば

$$V_{2m-1}(R) = \frac{2^m}{(2m-1)(2m-3)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1}\pi^{m-1}R^{2m-1}$$

でした．よって

$$\begin{aligned} A_{2m-2} = \frac{d}{dR}V_{2m-1}(R) &= \frac{2^m(2m-1)}{(2m-1)(2m-3)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1}\pi^{m-1}R^{2m-2} \\ &= \frac{2^m}{(2m-3)\cdot(2m-5)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1}\pi^{m-1}R^{2m-2} \end{aligned}$$

が得られます．

上の結果をまとめておきましょう．

n が偶数 $n = 2m$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ のとき

$$A_{n-1}(R) = A_{2m-1}(R) = \frac{2}{(m-1)!}\pi^m R^{2m-1}$$

n が奇数 $n = 2m-1$ $(m = 2, 3, 4, \ldots)$ のとき

$$A_{n-1}(R) = A_{2m-2}(R) = \frac{2^m}{(2m-3)(2m-5)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1}\pi^{m-1}R^{2m-2} \tag{4.7}$$

5　おわりに

ここまで，視えない世界における図形の面積や体積について，大学で学ぶ数学に少しずつ触れながら，まとまりのない話を幾つかしてきました．面白い，つまらない，感じ方はさまざまだと思います．大学では皆さんがまだ知らない数学をたくさん学ぶことができます．その中から自分が面白いと思ったものを見つけ，それについて徹底的に勉強する経験を積んでいただければ幸いです．

6　おまけ (1)：公式 (3.10) の証明

第 3 節で与えた n 次元空間における球の体積公式 (3.10) について，その数学的帰納法による証明を与えておきましょう．

まずは証明のための道具を準備しましょう．0 以上の整数 n に対して，次のような定積分で定義される値 I_n を考えます．

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta\, d\theta \qquad (n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots)$$

例えば $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, d\theta = \Big[\,\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$ であり，$I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta = \Big[\,\sin\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ です．**一般の I_n を求めてみましょう**．そのために，漸化式を作ってみます．$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}\theta \cdot \cos\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1}\theta \cdot (\sin\theta)'\, d\theta \\
&= \Big[\cos^{n-1}\theta \cdot \sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{n-1}\theta)' \cdot \sin\theta\, d\theta \qquad (\text{部分積分}) \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}\theta \cdot \sin^2\theta\, d\theta = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}\theta \cdot (1-\cos^2\theta)\, d\theta \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2}\theta\, d\theta - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta\, d\theta \\
&= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n
\end{aligned}$$

となって，

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \qquad (n = 2,\, 3,\, 4,\, \ldots) \tag{6.1}$$

という漸化式が得られました．

少し話が回りくどくなりますが，この漸化式 (6.1) を使って，n が偶数の場合と奇数の場合に分けて I_n を求めてみましょう．

n が偶数 $n = 2m$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ の場合：漸化式 (6.1) を繰り返し用いて

$$
\begin{aligned}
I_{2m} &= \frac{2m-1}{2m} I_{2m-2} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} I_{2m-4} = \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \frac{2m-5}{2m-4} I_{2m-6} \\
&= \cdots \\
&= \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdot \frac{2m-5}{2m-4} \cdot \cdots \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0. \qquad (6.2)
\end{aligned}
$$

$I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ でしたから，この段階ですでに I_{2m} は求まったともいえますが，さらに ***Γ*** **関数を使って (6.2) の最後の式を書き換えてみます**．第 3 節で与えた式 (3.9) (で $n = m$ としたもの) により

$$
(2m-1) \cdot (2m-3) \cdot (2m-5) \cdot \cdots \cdot 3 \cdot 1 = \frac{2^m}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{2m+1}{2}\right) = \frac{2^m}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) \qquad (6.3)
$$

が成り立ち，式 (3.8) (で $n = m$ としたもの) により

$$
\begin{aligned}
&(2m) \cdot (2m-2) \cdot (2m-4) \cdot \cdots \cdot 4 \cdot 2 \\
&= 2 \cdot m \cdot 2 \cdot (m-1) \cdot 2 \cdot (m-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \\
&= 2^m m! = 2^m \Gamma(m+1)
\end{aligned}
$$

が成り立ちますので，これらの結果と $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ を (6.2) に代入して

$$
I_{2m} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(m+1)} \sqrt{\pi} \qquad (m = 1, 2, 3, \cdots) \qquad (6.4)
$$

が得られます．この式は $m = 0$ の場合も正しいです．

n が奇数 $n = 2m - 1$ $(m = 2, 3, 4, \ldots)$ の場合：漸化式 (6.1) を繰り返し用いて

$$
\begin{aligned}
I_{2m-1} &= \frac{2m-2}{2m-1} I_{2m-3} = \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \frac{2m-4}{2m-3} I_{2m-5} = \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \frac{2m-4}{2m-3} \cdot \frac{2m-6}{2m-5} I_{2m-7} \\
&= \cdots \\
&= \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \frac{2m-4}{2m-3} \cdot \frac{2m-6}{2m-5} \cdot \cdots \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1. \qquad (6.5)
\end{aligned}
$$

$I_1 = 1$ でしたから，この段階ですでに I_{2m-1} は求まったともいえますが，この式も Γ 関数を使って書き換えてみましょう．式 (3.8) (で $n = m - 1$ としたもの) により

$$
\begin{aligned}
&(2m-2) \cdot (2m-4) \cdot (2m-6) \cdot \cdots \cdot 4 \cdot 2 \\
&= 2 \cdot (m-1) \cdot 2 \cdot (m-2) \cdot 2 \cdot (m-3) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \\
&= 2^{m-1} (m-1)! = 2^{m-1} \Gamma(m)
\end{aligned}
$$

が成り立ちますので，この式と (6.3) 式および $I_1 = 1$ を (6.5) に代入して

$$I_{2m-1} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(m)}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)} \sqrt{\pi} \qquad (m = 2,\, 3,\, 4,\, \ldots) \tag{6.6}$$

が得られます．この式は $m = 1$ の場合も正しいです．

n が偶数の場合と奇数の場合に分けて I_n を求め，それを Γ 関数を使って表現してみましたが，(6.4) 式と (6.6) 式を見ると，場合分けをしなくても次の公式が成り立っていることが分かります．

$$\boldsymbol{I_n = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \sqrt{\pi} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)} \tag{6.7}$$

これで準備は終了です．それでは，(6.7) 式を使って，n 次元空間における半径 R の球の体積公式

$$\boldsymbol{V_n(R) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \sqrt{\pi^n} R^n} \tag{3.10}$$

を，n についての数学的帰納法で証明していきたいと思います．

すでに $n = 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5$ の場合は (3.10) 式が正しいことが分かっていますね．では，$n = k$ の場合に (3.10) 式が正しいことを仮定して，$n = k + 1$ の場合にも (3.10) 式が正しいことを証明しましょう．

$k + 1$ 次元空間における半径 R の球

$$x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_k{}^2 + x_{k+1}{}^2 \leq R^2$$

を，$x_1 = t$ のところで切った切り口は，

$$\text{半径 } \sqrt{R^2 - t^2} \text{ の } (\underline{k \text{ 次元の}}) \text{ 球}$$

となっています．その体積 $V_k(\sqrt{R^2-t^2}\,)$ は，数学的帰納法の仮定により

$$\frac{1}{\Gamma\left(\dfrac{k}{2}+1\right)}\sqrt{\pi^k}\big(\sqrt{R^2-t^2}\,\big)^k$$

となりますから，求める体積 $V_{k+1}(R)$ は

$$V_{k+1}(R)=\int_{-R}^{R}\frac{1}{\Gamma\left(\dfrac{k}{2}+1\right)}\sqrt{\pi^k}\big(\sqrt{R^2-t^2}\,\big)^k\,dt$$

で与えられます．$t=R\sin\theta$ とおいた置換積分を適用し，(6.7) 式を用いると，右辺の定積分は

$$\begin{aligned}
&\int_{-R}^{R}\frac{1}{\Gamma\left(\dfrac{k}{2}+1\right)}\sqrt{\pi^k}\big(\sqrt{R^2-t^2}\,\big)^k\,dt\\
&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\Gamma\left(\dfrac{k}{2}+1\right)}\sqrt{\pi^k}R^{k+1}\cos^{k+1}\theta\,d\theta=\frac{1}{\Gamma\left(\dfrac{k}{2}+1\right)}\sqrt{\pi^k}R^{k+1}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{k+1}\theta\,d\theta\\
&=\frac{1}{\Gamma\left(\dfrac{k}{2}+1\right)}\sqrt{\pi^k}R^{k+1}\cdot 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{k+1}\theta\,d\theta=\frac{1}{\Gamma\left(\dfrac{k}{2}+1\right)}\sqrt{\pi^k}R^{k+1}\cdot 2I_{k+1}\\
&=\frac{1}{\Gamma\left(\dfrac{k}{2}+1\right)}\sqrt{\pi^k}R^{k+1}\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\dfrac{(k+1)+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{k+1}{2}+1\right)}\sqrt{\pi}\\
&=\frac{1}{\Gamma\left(\dfrac{k+1}{2}+1\right)}\sqrt{\pi^{k+1}}R^{k+1}
\end{aligned}$$

と計算され，

$$V_{k+1}(R)=\frac{1}{\Gamma\left(\dfrac{k+1}{2}+1\right)}\sqrt{\pi^{k+1}}R^{k+1}$$

が得られました．これは $n=k+1$ の場合にも (3.10) が正しいことを意味しています．

[公式 (3.10) の証明終わり]

7　おまけ (2)：関連するその他の話題

★ 2 次元平面における三角形の面積公式

空間の次元が幾つであっても，三角形 OAB の面積 S が

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2} \tag{1.2}$$

や

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} \end{vmatrix}} \tag{1.3}$$

で与えられることは第 1 節で説明した通りですが，空間の次元が 2 の場合に限り，すなわち 2 次元平面における三角形に限り，その面積 S をもっと簡単な形で書き表すことができます．さらにこの場合には，S について，行列式を用いた別の公式を与えることも可能です．2 次元平面の場合は

$$\vec{a} = (a_1, a_2), \qquad \vec{b} = (b_1, b_2)$$

であり，この場合，(1.2) や (1.3) の右辺は

$$\frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2 - a_2b_1)^2} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1|$$

に等しいことが分かります．(計算で確認してみてください.) さらに

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

ですから，まとめると，次のようになります．

> 2 次元平面において 3 点 $\mathrm{O} = (0,0)$, $\mathrm{A} = (a_1, a_2)$, $\mathrm{B} = (b_1, b_2)$ が与えられたとき，三角形 OAB の面積 S は
>
> $$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}|a_1b_2 - a_2b_1| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ の絶対値} \tag{7.1}$$
>
> で与えられる．

★ 3 次元空間における四面体の体積公式

空間の次元が幾つであっても，四面体 OABC の体積 V が

$$V = \frac{1}{6}\Big\{\big|\vec{a}\big|^2\big|\vec{b}\big|^2\big|\vec{c}\big|^2 + 2\big(\vec{a}\cdot\vec{b}\big)\big(\vec{b}\cdot\vec{c}\big)\big(\vec{c}\cdot\vec{a}\big) - \big|\vec{a}\big|^2\big(\vec{b}\cdot\vec{c}\big)^2 - \big|\vec{b}\big|^2\big(\vec{c}\cdot\vec{a}\big)^2 - \big|\vec{c}\big|^2\big(\vec{a}\cdot\vec{b}\big)^2\Big\}^{\frac{1}{2}} \tag{2.3}$$

や

$$V = \frac{1}{6}\sqrt{\begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c} \end{vmatrix}} \tag{2.4}$$

で与えられることは第 2 節で説明した通りですが，空間の次元が 3 の場合に限り，すなわち 3 次元空間における四面体の体積に限り，行列式を用いた別の公式を与えることも可能です．3 次元空間の場合は

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \quad \vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

であり，この場合，(2.3) や (2.4) の右辺は

$$\frac{1}{6}\sqrt{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2} \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{の絶対値}$$

に等しいことが分かります．(計算で確認できますが，かなり大変です.) この結果をまとめておきましょう．

> 3 次元空間において 4 点 O $= (0,0,0)$，A $= (a_1, a_2, a_3)$，B $= (b_1, b_2, b_3)$，C $= (c_1, c_2, c_3)$ が与えられたとき，四面体 OABC の体積 V は
>
> $$V = \frac{1}{6}\sqrt{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{の絶対値} \tag{7.2}$$
>
> で与えられる．

★ 4 次元空間における五胞体の体積公式

最後に，『五胞体』について少しだけ触れておきましょう．(筆者が無学のため詳しくは書けません．説明もかなり雑です．すみません.) 2 次元平面において，3 個の点を線分で結ぶと 3 個の辺で囲まれた三角形ができますね．3 次元空間においては 4 個の点を線分で結ぶと 4 個の三角形で囲まれた四面体ができます．同じようにして，4 次元空間の 5 個の点を線分で結ぶことによって，5 個の四面体で囲まれた立体ができあがります．この立体を『五胞体』といいます．

五胞体の体積について考えてみましょう．すっきりした形の体積公式を与えるには『4 次の行列式』

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} \tag{7.3}$$

を使うのがよいです．(7.3) の計算方法についてはここでは内緒にしておきましょう．(大学に入学してからのお楽しみ.) この行列式を使うと，(7.1) や (7.2) に似た，次の公式が得られます．

4 次元空間において 5 点 $\mathrm{O} = (0,0,0,0)$, $\mathrm{A} = (a_1,a_2,a_3,a_4)$, $\mathrm{B} = (b_1,b_2,b_3,b_4)$, $\mathrm{C} = (c_1,c_2,c_3,c_4)$, $\mathrm{D} = (d_1,d_2,d_2,d_4)$ が与えられたとき，五胞体 OABCD の体積 V は

$$V = \frac{1}{24}\sqrt{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}^2} = \frac{1}{24}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} \text{の絶対値} \tag{7.4}$$

で与えられる．