図形の対称性

柴田 将敬

名城大学 理工学部 数学科

2022 年 7 月 30 日

自己紹介

- 氏名: 柴田(しばた) 将敬(まさたか)
- 所属: 名城大学 理工学部 数学科 准教授
- 研究テーマ: 非線形偏微分方程式、変分問題、マーラー予想

このスライドについて

- このスライドは、2022 年 7 月 30 日のオープンキャンパスで私が担当した模擬講義で用いたものを一部修正・変更したものです。
- 模擬講義でもそうだったように、黒板を使って補足説明をする前提でスライドを作っているので、説明不足な所や分かりにくいところも多々あるかと思います。
- 時間の都合上、模擬講義では触れなかった部分のスライドも含まれています。

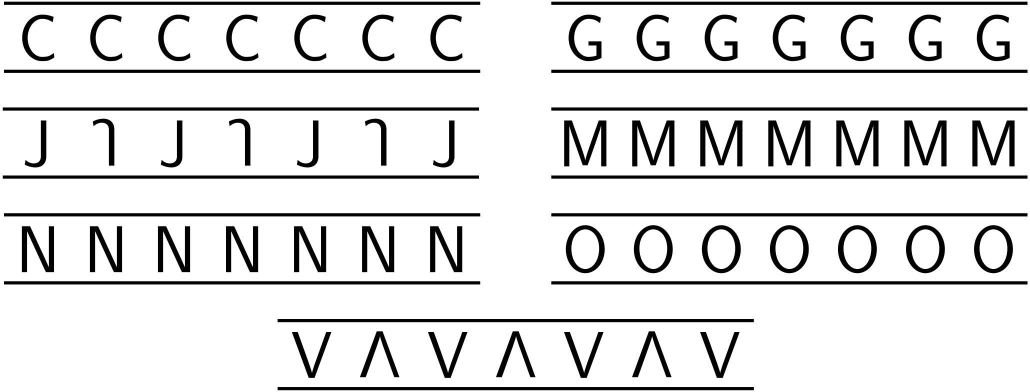
今回の模擬講義の目標

対称な図形の話と、それに関連する数学の概念を紹介する。

帯状の模様の持つ対称性

問

次の帯状の図形(左右には繰り返しが無限に続いているとする)はどのような対称性を持つか？



小学校で、「点対称」「線対称」などの図形に関する「対称性」を学んだはず。
「対称性」についてより数学的にきちんとした形で述べたい。

問

数学においては、用語の意味を明確にしておきたい。

そもそも対称性とは何か?

対称性

数学・物理などでは、何らかの「変換」で不変なものを「対称」である、という。

つまり、変換と対称性は表裏一体のものである。

例:対称式

文字を入れ替えるという「変換」に関して不変な式は<u>対称式</u>と呼ばれる。

$$x^2 + xy + y^2, \quad x + y + z, \quad xy + yz + zx, \ldots$$

ここでは、「合同変換」と、その変換により定まる対称性について考える。

合同変換

平面上の図形(点・直線・線分・曲線など)を、平面上の図形に対応させる(移動させる)規則のことを(平面上の)変換という。

変換前の図形と変換後の図形が、形も大きさも同じになる(移動すればぴったり重なる)ような変換を、合同変換という。

合同変換は、長さを変えない変換なので、等長変換とも呼ばれる。

例

ある点を中心とする回転(θ 度回転)は、合同変換。

例

図形が、ある点を中心とする 180 度回転で不変なとき、その図形は点対称である、と表現される。

問

平面上の合同変換はどのようなものがあるか?

定理

平面上の合同変換は次の **5** 種類である。

- 恒等変換
- 平行移動
- (ある点を中心とする)回転
- (ある直線を軸とする)鏡映
- (ある直線を軸とする)すべり鏡映:これは、直線に沿った平行移動とその直線にを軸とする鏡映を同時に行う合同変換。

恒等変換で不変なのはあたりまえなので、それ以外の変換で不変なものを回転対称、鏡映対称、すべり鏡映対称と呼ぶことにする。

問

先ほどの図形はどんな対称性を持つか?

先ほどの図形は、すべて平行移動で不変な図形である。したがって、その他の対称性としては「回転対称」「鏡映対称」「すべり鏡映対称」の **3** つだけを考えれば良い。

図形	回転	鏡映(上下)	鏡映(左右)	すべり鏡映
G G G G G G G				
N N N N N N N				
C C C C C C C				
M M M M M M M				
J ⅂ J ⅂ J ⅂ J				
V Λ V Λ V Λ V				
O O O O O O O				

図形それぞれの対称性を持ってるかどうか、自分で判定してみましょう。答えは次ページ。

図形	回転	鏡映(上下)	鏡映(左右)	すべり鏡映
G G G G G G G	／	／	／	／
N N N N N N N	○	／	／	／
C C C C C C C	／	○	／	○
M M M M M M M	／	／	○	／
J ɾ J ɾ J ɾ J	／	／	／	○
V Λ V Λ V Λ V	○	／	○	○
O O O O O O O	○	○	○	○

実は(平行移動で対称な帯状の図形の)対称性は上の 7 種類。

合同変換を数式で表す

図形をどう扱うか?

- 平面図形は、xy 平面内の集合として表される。
  これは、座標幾何・解析幾何などと呼ばれる考え方で、デカルト(René Descartes, 1596–1650)によって導入された。
- 点は(直交)座標を用いて表すことが出来る。
- 直線や曲線は、方程式を満たす集合として表すことが出来る。
- 中身のある図形は、不等式を使って表すことが出来る。
- 数式と言葉を組み合わせて表すことも出来る。

例 1

点 $P(0,1)$, 直線 $\ell : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$,
円 $C : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

例 2

放物線 $y = x^2$ と直線 $y = 1$ で囲まれる部分。

補足

- 数式を用いることで、全て言葉で表すより、正確な(人によって解釈に差が出ない)表現がしやすくなる。
- 幾何の問題に対して、代数的な「計算技術」を使うことが出来る。
- 抽象的な概念ではなく、具体的な数式・数値を使って表すことで、コンピュータで図形を扱うことが容易になる。

問

合同変換を数式でどのように表す?

回転

点 (x, y) は、原点中心、角度 θ の回転によって、$(x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$ に移動する。

このことは、回転を表す行列

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

を用いて、

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

のように計算出来る。

x 軸に関する鏡映

点 (x, y) は、x 軸に関する鏡映によって、$(x, -y)$ に移動する。

このことは、x 軸に関する鏡映を表す行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を用いて、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

のように計算出来る。

直線 $y = (\tan\theta)x$ に関する鏡映

(x, y) を角度 $-\theta$ で回転し、x 軸を中心に鏡映を取り、さらに θ で回転したものが求めるものである。
これは、行列を用いれば、

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

のように表すことが出来て、行列の「積」を計算すると、

$$\cdots = \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\sin\theta\ \cos\theta \\ 2\sin\theta\ \cos\theta & \sin^2\theta - \cos^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos 2\theta + y\sin 2\theta \\ x\sin 2\theta - y\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

と計算出来る。

結局、点 (x, y) は、$y = (\tan\theta)x$ に関する鏡映で、
$(x\cos 2\theta + y\sin 2\theta, x\sin 2\theta - y\cos 2\theta)$ に移動する。

行列についてあれこれ

- 行列の基礎理論は「線形代数」と呼ばれるもので、連立方程式を解くための理論でもある。
- 数値シミュレーション(天気予報とかもこれ)では、コンピュータを用いた(巨大な)行列の演算が行われる。
- 近年話題のビッグデータの解析でも重要。
- google が巨大企業に成長したきっかけは、「google 検索」。当時凄まじいスピードで巨大化していたインターネットのコンテンツの検索結果を、「ページランク」順に並べて表示する(ページランクはプログラムによって自動的に計算される)ことで、検索のシェアを掴んだ。
  ページランクは、サイト同士の関係を行列で表して、その行列の「固有値」と呼ばれる量として計算される。

正三角形の持つ対称性

これまで、合同変換に注目して来ました。最後に、正三角形が持つ対称性について考えてみます。

問

(原点を重心とする)正三角形はどのような対称性を持つか?

正三角形の持つ対称性

原点が重心で、頂点の一つは $(0,1)$ である正三角形は次の対称性を持つ。

- 120 度回転対称
- 240 度回転(-120 度回転)対称
- 左右対称($x=0$ に関する鏡映で対称)
- $y=x/\sqrt{3}$ に関する鏡映で対称
- $y=-x/\sqrt{3}$ に関する鏡映で対称

問

ここで、120 度回転、240 度回転、$x=0$ に関する鏡映、$y=x/\sqrt{3}$ に関する鏡映、$y=-x/\sqrt{3}$ に関する鏡映と 5 つの合同変換が出てくるが、これをもっと整理できないか?

「群」の考え方で整理

- 恒等変換は E で表す。
- 120 度回転を R で表す。点 P を 120 度回転したものは $R(P)$.
- 点 P を 240 度回転すると、$R(R(P))$. これを $(R \circ R)(P)$ と表す。つまり、240 度回転は $R \circ R = R^2$.
- 120 度変換を 3 回やれば恒等変換。つまり、$R \circ R \circ R = R^3 = E$.
- 直線 $x = 0$ に関する鏡映は V で表す。
- 点 P の $x/\sqrt{3}$ に関する鏡映は、$R(V(R^2(P)))$ だから、$(R \circ V \circ R^2)(P)$ と表す。つまり、$R \circ V \circ R^2$.
- 点 P の $-x/\sqrt{3}$ に関する鏡映は、$R^2(V(R(P)))$ だから、$(R^2 \circ V \circ R)(P)$ と表す。つまり、$R^2 \circ V \circ R$.

補足

- 正三角形に関する合同変換は、E, R, V の 3 つの変換(恒等写像以外の 2 つの変換)を用いて表せる。
- 変換を合成することは、$\circ$ という演算で計算出来る。
- ここでの合同変換は $\{E, R, R^2, V, R \circ V \circ R^2, R^2 \circ V \circ R\}$ の 6 つ。
- このように、数とは限らない対象に(それなりに良い性質を満たす)演算を考える理論の一般論は、「群論」と呼ばれるもの。
- この群は、二面体群(正多角形の合同変換がつくる群)と呼ばれる種類のもの。
- 図形的な考察をすると、$R^2 \circ V = V \circ R$ である。この演算は「可換性」が成り立たない。
- $R \circ V \circ R^2 = R^2 \circ V$, $R^2 \circ V \circ R = R \circ V$ を使って整理すると、合同変換は $\{E, R, R^2, V, R \circ V, R^2 \circ V\}$ の 6 つ。
- R と V を何個組み合わせたものでも、$E \circ R = R \circ E = R$, $E \circ V = V \circ E = V$, $R^3 = E$, $V^2 = E$, $R^2 \circ V = V \circ R$ 等を用いて単純な形に計算出来る。

例題

$R \circ V \circ R^2 \circ V \circ R = E.$

図形の対称性と関係する群についてあれこれ

- 壁紙や布などには、連続的な繰り返しの模様が多く使われる。この模様の対称性は、17 通りに分類されることが知られているが、これは、図形の対称性に関して現れる群(平面結晶群と呼ばれる)が 17 通り存在することに基づく。
- 空間的な繰り返しに関する群は空間結晶群と呼ばれ、230 通り存在する。分類の完成は 19 世紀終わり頃、E. S. Fedorov や A. M. Schönflies の仕事。
- 名前の通り、結晶群は、結晶の構造(連続的な繰り返し)を分類するのに直接役立つ。

参考文献

- 前半の帯状の模様の話について(高校生の知識で十分に読み進められる本):
  ミカエル・ロネー 著、山本知子・川口明百美 訳「ぼくと数学の旅に出よう」NHK 出版
- 最後の群の話について(数学の専門書なので難しい):
  河野俊丈 著「結晶群」共立出版

最後に

図形と関連して、「対称性」「行列」「群」などの概念を駆け足で少しだけ紹介してきました。

現在・一言に「数学」と言ってもとてつもなく広大で、大学に入っても(例え研究者になったとしても)学びきれるものではありませんが、自分に合った専門分野や自分に合った問題に出会うことが出来れば、数学の魅力を強く感じることが出来ると思います。

皆さんが、どこかで、数学の魅力に触れることが出来ることを願っています。